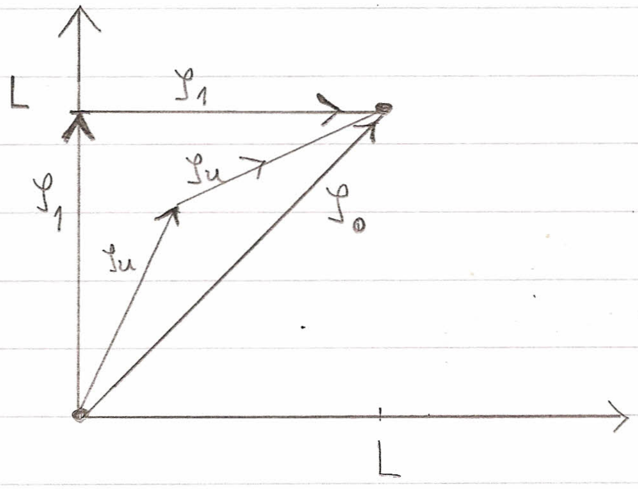
und auch $(s,u) \mapsto \varphi_u(s)$ ist eine stetige Abbildung $[0,1] \times [0,1] \to \Delta_L$. Die Skizze zeigt die Spur von φ_u in Δ_L, speziell ist

$$\varphi_0(s) = L \cdot (s,s)$$



Alle Spuren starten in $(0,0)$ und laufen wie angedeutet nach (L,L), die Spur von φ_0 ist die Diagonale. Es sei schließlich

$$T_u := \sigma \circ \varphi_u : [0,1] \longrightarrow S^1 \, , \; 0 \leq u \leq 1$$

Man hat Stetigkeit von σ, also Stetigkeit von jeder einzelnen Kurve T_u, aber offensichtlich ist auch $(s,u) \mapsto T_u(s) = \sigma(\varphi_u(s))$ stetig wegen der Stetigkeit von $(\rho, u) \mapsto \mathcal{S}_u(\rho)$. Daher und mit den Vorbemerkungen ist

$$\text{Rotationsindex } I_{T_u} \text{ der Kurve } T_u$$

$$\equiv \text{konst} \in \mathbb{Z}.$$

(beachte: $\overbrace{T_u(0) = T_u(1)}^{=\alpha'(0)}$; T_u erfüllt also die Erfordernisse zur Definition des Index!)

Außerdem: $\quad T_0(\rho) = \mathfrak{S}(\mathcal{S}_0(\rho)) = \mathfrak{S}(L(\rho,\rho))$

$$= \alpha'(L\rho),$$

m. a. W.: $\quad I_{T_0} := I_\alpha,$

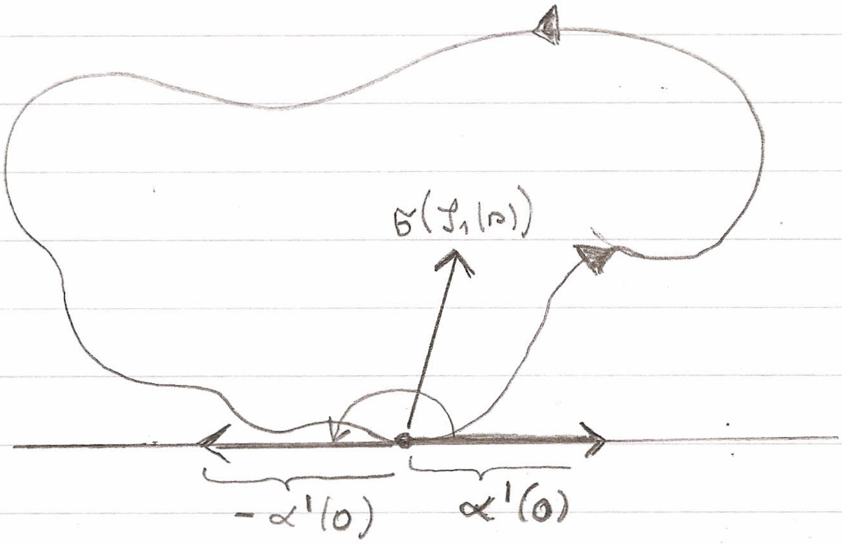
so dass obige Zahl "konst $\in \mathbb{Z}$" gerade I_α ist.

Insbesondere folgt:

$$I_\alpha = I_{T_1},$$

und den Index von T_1 können wir in einem letzten Schritt ausrechnen:

Es ist $T_1 = \sigma \circ \varphi_1 : [0,1] \to S^1$.



Durchläuft s das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$, so durchläuft

$$\sigma(\varphi_1(s)) = \sigma(0, 2L\cdot s) = \frac{\alpha(2Ls) - \alpha(0)}{|\alpha(2Ls) - \alpha(0)|}$$

die normierten Sehnen vom Punkt $\alpha(0)$ aus,

wobei $\sigma(\varphi_1(0)) = \alpha'(0)$, $\sigma(\varphi_1(\frac{1}{2})) = -\alpha'(0)$,

wobei $\sigma(\varphi_1(s))$ stets auf derselben Hälfte von S^1 bleibt, da Spur α ja auf einer Seite der Tangente an α in $\alpha(0)$ bleibt. Die Änderung des Winkels ist also π oder $-\pi$ (in der Skizze: $+\pi$).

Für s zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 variiert

$$\sigma(\varphi_1(s)) = \sigma(2Ls - L, L) =$$

$$\frac{\alpha(L) - \alpha(2Ls-L)}{|\alpha(L) - \alpha(2Ls-L)|} = \frac{\alpha(0)-\alpha(2Ls-L)}{|\alpha(0) - \alpha(2Ls-L)|}$$

offensichtlich genau in der anderen Hälfte von S^1, die Winkeländerung (von $-\alpha'(0) = \sigma(\varphi_1(\frac{1}{2}))$ auf $\alpha'(0) = \sigma(\varphi_1(1))$) ist wieder $+\pi$ oder $-\pi$ (in beiden Fällen gleiches Vorzeichen), insgesamt folgt 2π oder -2π als Winkeländerung, so dass $I_\alpha = \pm 1$. $\square$

<u>Korollar</u> : Es sei $\alpha: [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine <u>einfach</u> geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. $\varkappa_\alpha$ bezeichne die orientierte Krümmung.

Dann gilt :

a) $\int_0^L \varkappa_\alpha \, ds = \pm 2\pi$.

(Die Größe $\int_0^L \varkappa_\alpha \, ds$ wird auch Totalkrümmung von α genannt. Für einfach geschlossene Kurven ist diese also $\pm 2\pi$.)

b) Ist $|\varkappa_\alpha| \geq \frac{1}{r}$ für ein $r > 0$, so ist

$$L = L(\alpha) \; (= \text{Länge von } \alpha) \leq 2\pi r.$$

c) Aus $|\varkappa_\alpha| \leq \frac{1}{r}$ folgt $L(\alpha) \geq 2\pi r$.

d) Es ist $\max |\varkappa_\alpha| \geq 2\pi / L$.

Beweis: a) Für geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven wurde gezeigt

$$2\pi I_\alpha = \int_0^L \varkappa_\alpha(s) \, ds,$$

so dass die Behauptung für einfach geschlossene Kurven aus $I_\alpha = \pm 1$ folgt.

c) Es ist mit a) $2\pi = \left| \int_0^L \varkappa_\alpha \, ds \right| \leq$

$\int_0^L |\varkappa_\alpha| \, ds \leq \frac{L}{r}$, also $L \geq 2\pi r$.

b) Die Voraussetzung $|\varkappa_\alpha| \geq 1/r$ liefert speziell, dass $\varkappa_\alpha$ keinen Vorzeichenwechsel hat. Also gilt wieder mit a):

$$2\pi = \left| \int_0^L \varkappa_\alpha \, ds \right| = \int_0^L |\varkappa_\alpha| \, ds \geqq L/r,$$

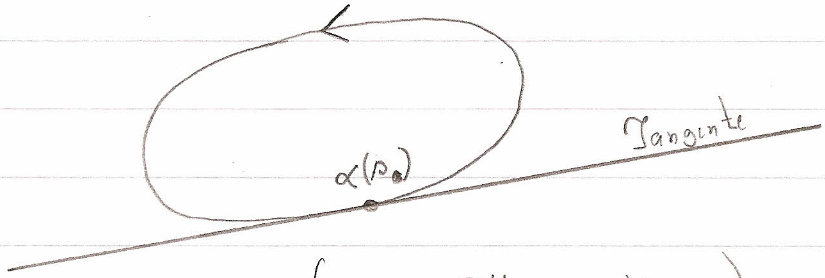
d.h. $L \leq 2\pi r$.

d) Wäre $\max |\varkappa_\alpha| \leq (1-\varepsilon) \, 2\pi/L$ für ein $\varepsilon > 0$, so ergibt c):

$$L \geq 2\pi \frac{1}{(1-\varepsilon) 2\pi} L > L,$$

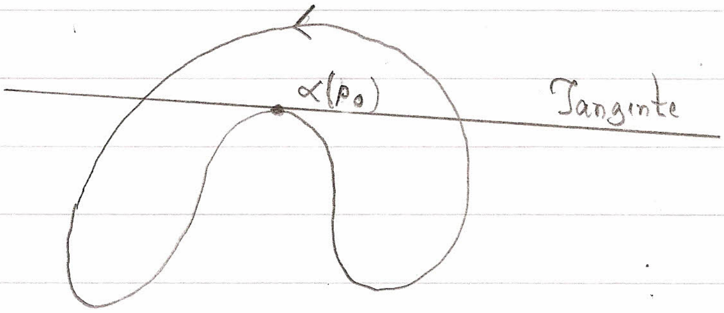
was unmöglich ist. $\square$

Eine <u>konvexe Kurve</u> in der Ebene wird anschaulich dadurch beschrieben, dass für jedes $s_0 \in I$ die Spur ganz auf der einen Seite der Tangente durch den Kurvenpunkt $\alpha(s_0)$ liegt.



"Konvex"

(z.B. Ellipse, Kreis)



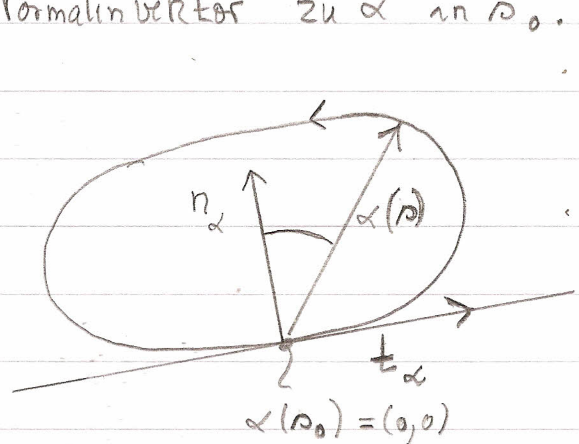
"nicht konvex"

<u>Definition</u>: Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve. α heißt konvex, falls ~~für jede Stelle $s_0 \in I$~~ gilt:

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) \geq 0 \quad \forall s \in I, s_0 \in I$$

oder $\quad$ -"- $\quad \leq 0 \quad \forall s \in I, s_0 \in I.$

Hierbei ist $n_\alpha(s_0)$ der Normalenvektor zu α in s_0.



hier „≥ 0".

< <u>Übung</u>: man überlege, dass obige Ungleichungen

genau bedeuten, dass Spur (α) überall ganz auf einer Seite der Tangente liegt!)

Konvexe Kurven lassen sich durch das Vorzeichen der Krümmung beschreiben – <u>es darf keinen Vorzeichenwechsel geben</u> (vgl. dies mit $f'' \geq 0$ für reelle Funktionen!).

<u>Theorem</u> (<u>Charakterisierung konvexer Kurven</u>)

Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, <u>einfach</u> geschlossene Kurve. Dann gilt:

$$\boxed{\alpha \text{ konvex} \iff \begin{cases} \varkappa_\alpha(s) \geq 0 & \forall\, 0 \leq s \leq L \\ \quad\text{oder} & \\ \varkappa_\alpha(s) \leq 0 & \forall\, 0 \leq s \leq L. \end{cases}}$$

<u>Bemerkung</u>: Eine einfach geschlossene, konvexe Kurve zerlegt anschaulich den $\mathbb{R}^2$ in genau zwei Teile, nämlich die konvexe, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$,

die von Spur α umschlossen wird, und den dazu disjunkten unbeschränkten Rest. Allgemeiner (ohne Krümmungsvoraussetzung und daher viel schwerer zu beweisen) gilt der folgende topologische Satz

Jordan'scher Kurvensatz: Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine lediglich stetige, einfach geschlossene Kurve. Dann hat $\mathbb{R}^2$ - Spur α genau 2 Zusammenhangskomponenten, eine ist beschränkt ("Innengebiet"), die andere unbeschränkt ("Außengebiet").

Beweis des Theorems: 1.) Es sei zunächst α konvex im Sinne der Definition. Dann gilt etwa in $s_0 \in [0, L]$

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) \geq 0 \quad \forall\, s \in [0, L].$$

Gleichzeitig hat man die Taylorentwicklung bei s_0

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = (s - s_0)\, t_\alpha(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 \varkappa_\alpha(s_0)\, n_\alpha(s_0)$$

$$+ \text{ Restglied},$$

wobei das Restglied $R(s, s_0)$ die Eigenschaft hat, dass

$$\lim_{s \to s_0} (s - s_0)^{-2} R(s, s_0) = 0$$

gilt. Es folgt:

$$0 \leq (s - s_0)^{-2} \big(\alpha(s) - \alpha(s_0)\big) \cdot n_\alpha(s_0) =$$

$$(s - s_0)^{-1} \underbrace{t_\alpha(s_0) \cdot n_\alpha(s_0)}_{=0} + \frac{1}{2} \varkappa_\alpha(s_0) \underbrace{n_\alpha(s_0) \cdot n_\alpha(s_0)}_{=1} +$$

$$(s - s_0)^{-2} R(s, s_0) \cdot n_\alpha(s_0)$$

und nach Grenzübergang $s \to s_0$: $\frac{1}{2} \varkappa_\alpha(s_0) \geq 0$.

2.) Sei o.E. $\varkappa_\alpha \geq 0$ auf $[0, L]$.

Annahme: α ist <u>nicht</u> konvex.

< <u>Übung</u>: Details! >

$\square$

<u>Definition</u>: Sei $\alpha : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Ein <u>Scheitel</u> (<u>"vertex"</u>) von α ist eine <u>lokale Extremstelle</u> $s_0 \in [0,L]$ der orientierten Krümmung.

Interessant ist diese Begriffsbildung für geschlossene Kurven:

Kreis: jeder Punkt ist Scheitel

Ellipse: es gibt genau vier Scheitel

(bezogen auf reguläre Parametrisierungen!)

Ein berühmter Satz sagt, dass es für konvexe Kurven mindestens 4 Scheitel geben muss.

<u>Theorem</u> (<u>Vierscheitel-Satz</u>)

Sei $\alpha : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ einfach geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. <u>Ist α konvex</u>, <u>so</u> gibt <u>es mindestens vier Scheitel.</u>